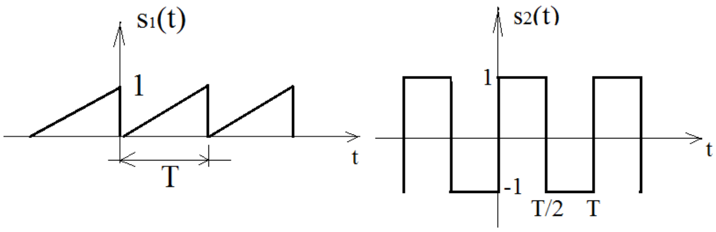
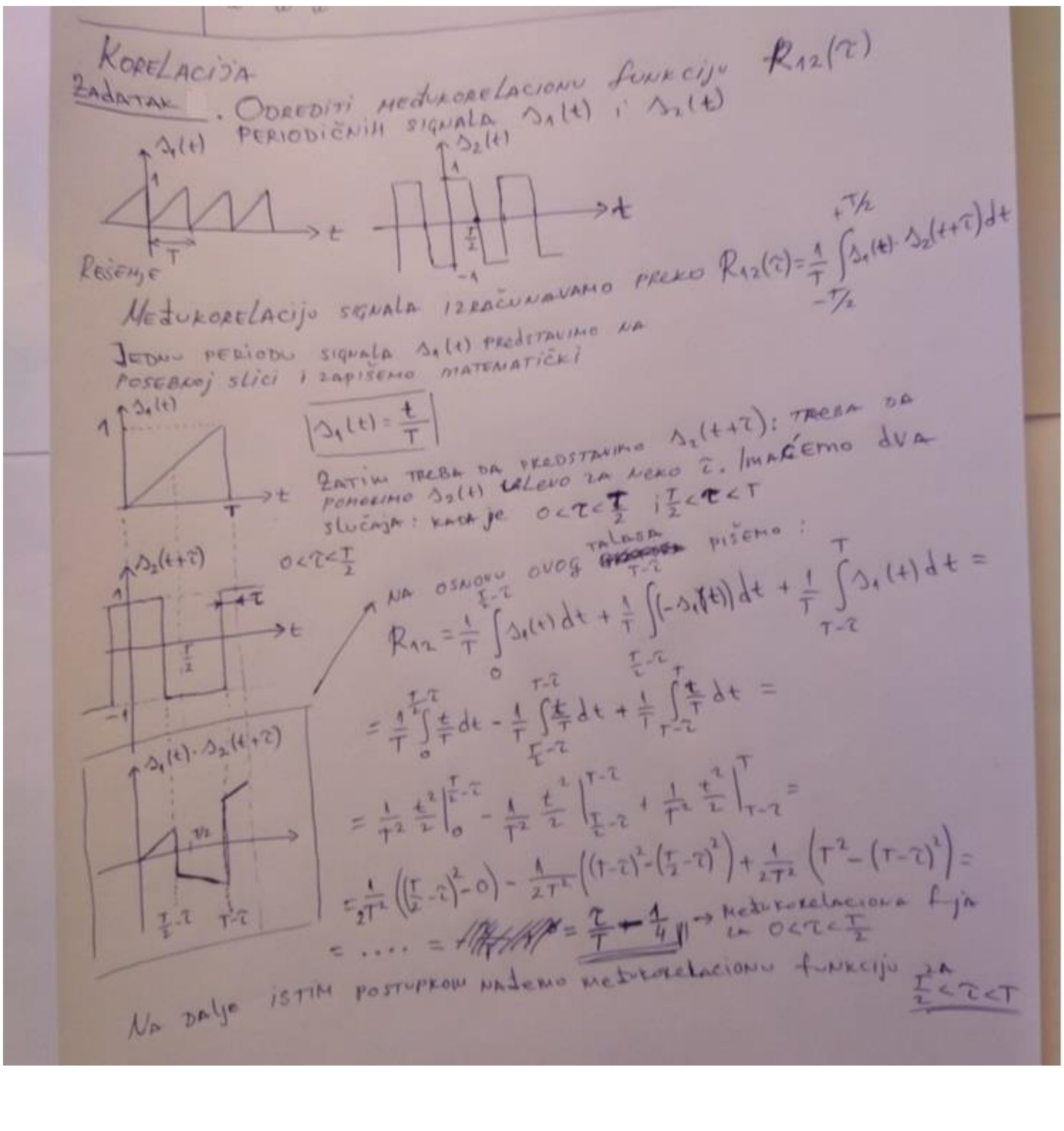
Računske vežbe – Osnovi telekomunikacija – Termin 5

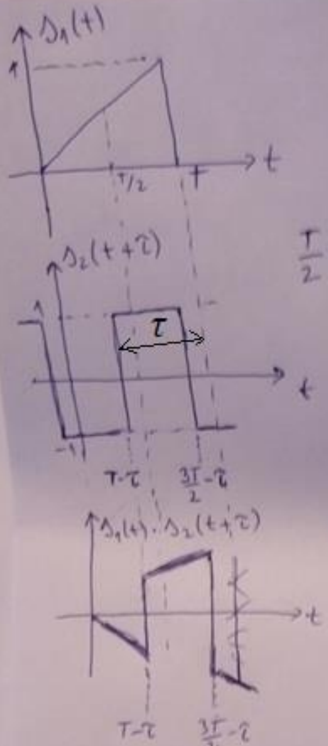
Zadatak 1. Odrediti međukorelacionu funkciju $R_{12}(\tau)$ periodičnih signala $s_1(t)$ *i* $s_2(t)$, prikazanih na slici 1.



Slika 1.

Rešenje:





$\frac{T}{2} < \tau < T$

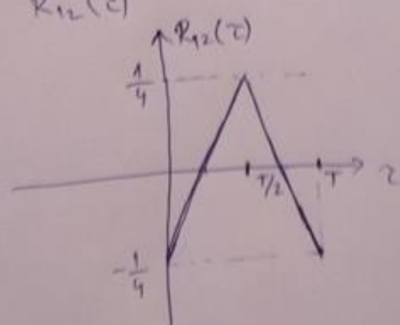
$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} \cancel{s}(-s_1(t))\,dt + \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{\frac{3T}{2}-\tau} s_1(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{3T}{2}-\tau}^{T} (-s_1(t))\,dt =$$

$$= \cdots\cdots = \underline{\underline{-\frac{\tau}{T} + \frac{3}{4}}}$$

predstavlja međukorelacionu funkciju za τ u intervalu od $\frac{T}{2}$ do T.

Najzad predstavimo i grafički međukorelacionu funkciju $R_{12}(\tau)$

$$\boxed{R_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{T} - \frac{1}{4}, & 0 < \tau < \frac{T}{2} \\ -\frac{\tau}{T} + \frac{3}{4}, & \frac{T}{2} < \tau < T \end{cases}}$$



Linearni sistemi

Prenosna funkcija sistema predstavlja količnik (odnos) izlaznog i ulaznog signala. Ako su nam dati signali u vremenskom domenu, prenosna funkcija sistema je

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

$y(t)$ → izlazni signal
$x(t)$ → ulazni signal

Ukoliko su dati signali u domenu učestanosti, onda prenosnu funkciju pišemo kao

$X(j\omega) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow Y(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Zadatak 1. Na slici 1. je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su:

$$\boxed{H_1(j\omega) = e^{-j\omega} \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad H_3(j\omega) = j\omega}$$

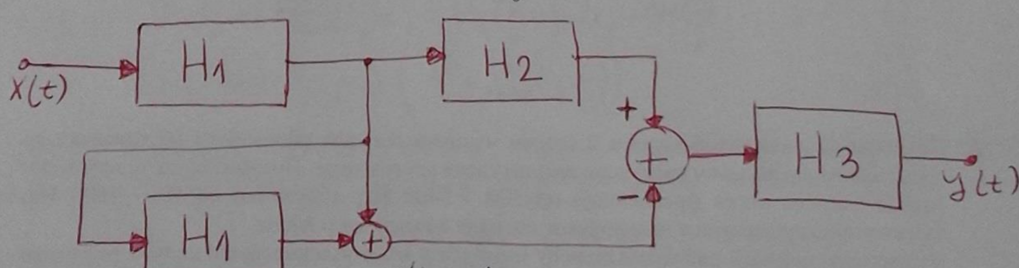
a) Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema

b) Ako na ulazu sistema deluje impuls

$$x(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

skicirati signal na izlazu sistema.

c) Odrediti vrednost izlaznog signala u trenutku $t = 2.75$.



Slika 1.

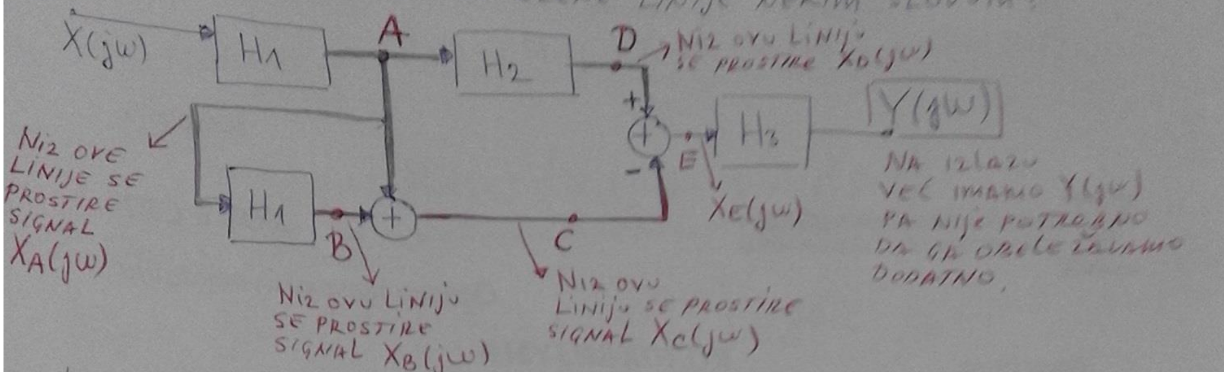
Rešenje:

a) Potrebno je da nađemo prenosnu funkciju sistema, tj. odnos signala na izlazu i signala na ulazu. Prenosnu funkciju ćemo izraziti u domenu učestanosti:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Dakle, potrebno je da krenemo od spektra ulaznog signala $X(j\omega)$ – ne posmatramo $x(t)$ kako je dato na slici, već odmah pišemo $X(j\omega)$, i postepeno krećemo ka izlazu $Y(j\omega)$, pri čemu svaku neobeleženu liniju između dva sklopa moramo da obeležimo.

OBELEŽIMO SVE NEOBELEŽENE LINIJE NEKIM SLOVOM:



Krećući se od ulaza $X(j\omega)$ idemo preko sklopa sa prenosnom funkcijom H_1 i računamo (odnosno predstavljamo) signal na izlazu tog sklopa

$$\underbrace{X_A(j\omega)}_{\text{izlaz iz sklopa } H_1} = \underbrace{H_1(j\omega)}_{\text{prenosna funkcija sklopa } H_1} \cdot \underbrace{X(j\omega)}_{\text{signal koji deluje na ulazu sklopa}}$$

Koristeći istu analogiju tražimo $X_B(j\omega)$ → to je izlaz ovog donjeg sklopa sa prenosnom funkcijom H_1 kada na njegov ulaz deluje signal $X_A(j\omega)$. Dakle:

$$X_B(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot X_A(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot X(j\omega) = H_1^2(j\omega)\cdot X(j\omega)$$

Signal $X_C(j\omega)$ predstavlja zbir signala X_A i X_B:

$$X_C(j\omega) = X_A(j\omega) + X_B(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot X(j\omega) + H_1^2(j\omega)\cdot X(j\omega) =$$
$$= H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)\left(1 + H_1(j\omega)\right)$$

Signal $X_D(j\omega)$ predstavlja izlaz iz sklopa sa prenosnom funkcijom $H_2(j\omega)$ kada na ulaz tog sklopa deluje $X_A(j\omega)$:

$$X_D(j\omega) = H_2(j\omega)\cdot X_A(j\omega) = H_2(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)$$

Signal $X_E(j\omega)$ predstavlja isto sumu signala X_D i X_C pri čemu $X_D(j\omega)$ uzimamo sa pozitivnim predznakom, a $X_C(j\omega)$ uzimamo sa negativnim predznakom kao što je označeno na slici:

$$X_E(j\omega) = X_D(j\omega) - X_C(j\omega) = H_2(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot X(j\omega) - H_1(j\omega)X(j\omega)\left(1 + H_1(j\omega)\right) =$$
$$= H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)\cdot\left(H_2(j\omega) - (1 + H_1(j\omega))\right) = H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)\left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)$$

Stižemo i do kraja, tj. signal $Y(j\omega)$ predstavlja izlaz iz sklopa sa prenosnom funkcijom $H_3(j\omega)$ kada na njegov ulaz deluje $X_E(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = H_3(j\omega)\cdot X_E(j\omega) = H_3(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot X(j\omega)\left(H_2(j\omega) - 1 - H_1(j\omega)\right)$$

Najzad, izrazimo prenosnu funkciju sistema:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{H_3(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot \cancel{X(j\omega)}\cdot\left(H_2(j\omega)-1-H_1(j\omega)\right)}{\cancel{X(j\omega)}}=$$

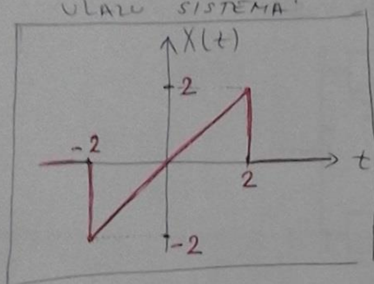
$$=H_3(j\omega)\cdot H_1(j\omega)\cdot\left(H_2(j\omega)-1-H_1(j\omega)\right)$$

Sada možemo da zamenimo vrednosti prenosnih funkcija pojedinih sklopova:

$$H(j\omega)=j\omega\cdot e^{-j\omega}\left(\frac{1}{j\omega}-1-e^{-j\omega}\right)=\cancel{j\omega}\cdot e^{-j\omega}\cdot\frac{1}{\cancel{j\omega}}-j\omega e^{-j\omega}-j\omega\cdot e^{-j\omega}\cdot e^{-j\omega}=$$

$$=\underline{e^{-j\omega}-j\omega\cdot e^{-j\omega}-j\omega\cdot e^{-2j\omega}}$$

b) Ukoliko na ulazu sistema deluje impuls $x(t)=\begin{cases}t, & |t|\le 2\\ 0, & |t|>2\end{cases}$ treba da skiciramo signal na izlazu sistema.
Dakle, potrebno je da dovedemo u vezu $y(t)$ sa ulazom $x(t)$.
Hajdemo prvo da skiciramo signal $x(t)$ koji deluje na ulazu sistema:



Sledeće što radimo je da napišemo:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)\cdot X(j\omega)$$

$$Y(j\omega)=\left(e^{-j\omega}-j\omega e^{-j\omega}-j\omega\cdot e^{-j2\omega}\right)\cdot X(j\omega)\Rightarrow$$

$$\boxed{Y(j\omega)=e^{-j\omega}\cdot X(j\omega)-j\omega e^{-j\omega}X(j\omega)-j\omega e^{-j2\omega}\cdot X(j\omega)}$$

Prelazimo iz domena učestanosti u vremenski domen (slično kao kod onog zadatka sa Furijeovom transform. samo što ovde imamo suprotan prelaz)

$$S(j\omega)\longrightarrow s(t)$$

$$e^{j\omega T_0}S(j\omega)\longrightarrow s(t+T_0)$$

$$j\omega\cdot e^{j\omega T_0}S(j\omega)\longrightarrow\frac{d\,s(t+T_0)}{dt}$$

Pravilo

uraditi ovu poslednju smenu kao domaći

Ako je poznat spektar $S(j\omega)$ signala $s(t)$ naći spektar signala $s_1(t)=\frac{d\,s(t+T_0)}{dt}$

DOMAĆI

$$\boxed{y(t)=x(t-1)-\frac{d\,x(t-1)}{dt}-\frac{d\,x(t-2)}{dt}}$$

Na osnovu ovog izraza skiciramo signal na izlazu sistema, pri čemu se sve radi grafički. Potrebno je da nacrtamo sve tri funkcije sa desne strane i na osnovu izraza da nacrtamo $y(t)$.

Crtamo redom $x(t-1)$, $\frac{d\,x(t-1)}{dt}$ i $\frac{d\,x(t-2)}{dt}$

to je f-ja $x(t)$ pomerena udesno za 1

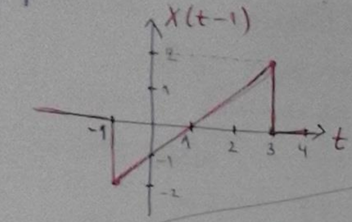
tražimo izvod $(t-1)'=t'=1$ (interval od 1 do 3)

izvod je $(t-2)'=t'=1$

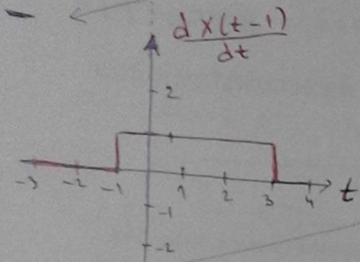
funkcija pomerena za 2 udesno (interval od 0 do 4)

$$y(t) = x(t-1) - \frac{dx(t-1)}{dt} - \frac{dx(t-2)}{dt}$$

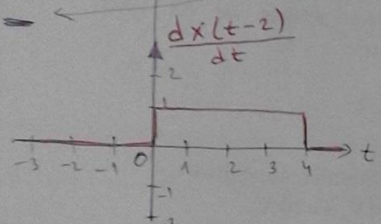
+



−



−



SADA JE POTREBNO, U CILJU NALAŽENJA $y(t)$, DA OD $x(t-1)$ GRAFIČKI ODUZMEMO $\frac{dx(t-1)}{dt}$ i $\frac{dx(t-2)}{dt}$

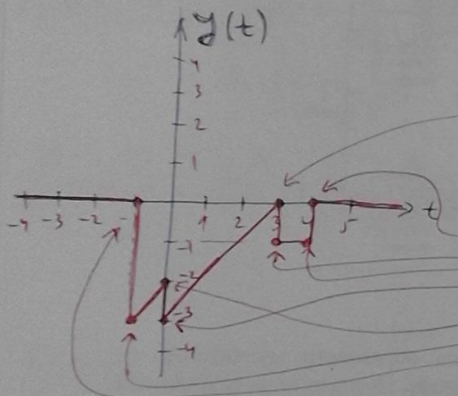
U TU SVRHU MOŽEMO DA NAPRAVIMO TABELU NA SLEDEĆI NAČIN: POSMATRAMO ZA KOJU VREDNOST t NA HORIZONTALNOJ OSI NEKA OD ~~DVE~~ TRI FUNKCIJE SKOKOVITO MENJA VREDNOST. VIDIMO DA SU TO: $t = -1, 0, 3$ i 4

t	y(t)	
−1	0 − 0 − 0 = 0	PRVA TAČKA
	−2 − 1 − 0 = −3	DRUGA TAČKA
0	−1 − 1 − 0 = −2	PRVA TAČKA
	−1 − 1 − 1 = −3	DRUGA TAČKA
3	2 − 1 − 1 = 0	PRVA TAČKA
	0 − 0 − 1 = −1	DRUGA TAČKA
4	0 − 0 − 1 = −1	PRVA TAČKA
	0 − 0 − 0 = 0	DRUGA TAČKA

KRENEMO SLEVA U DESNO i ZA TAČKU $t = -1$ U POČETKU SVE TRI FUNKCIJE IMAJU VREDNOST NULA.

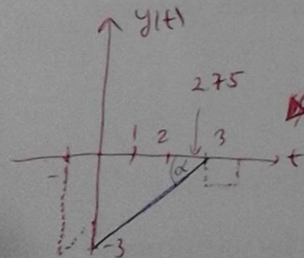
ZATIM PRVE DVE FUNKCIJE SKOKOVITO MENJAJU VREDNOST: PRVA NA −2, A DRUGA NA 1.

I PAZIMO DA NE ZABORAVIMO MINUS ISPRED DRUGE i TREĆE FUNKCIJE KAKO SMO DOBILI U GORNJEM IZRAZU



c) NA OSNOVU SKICIRANOG SIGNALA U DELU POD b) POTREBNO JE DA NAĐEMO VREDNOST SIGNALA NA IZLAZU U TRENUTKU $t = 2.75$. ODNOSNO TRAŽIMO $y(2.75) = ?$

$t = 2.75$ NAM SE NALAZI U OVOM DELU IZLAZNOG SIGNALA $y(t)$,



PA JE IZ TOG RAZLOGA POTREBNO NAPISATI JEDNAČINU PRAVE SAMO TOG DELA KOJI NAS ZANIMA

$$y(t) = -3 + \frac{3}{3}t = -3 + t$$

$$t = 2.75 : \; y(2.75) = -3 + 2.75 = \underline{\underline{-0.25}}$$

ODSEČAK NA VERTIKALNOJ OSI

KREĆUĆI SE SLEVA UDESNO VIDIMO DA FUNKCIJA RASTE ↗

KOEFICIJENT PRAVCA PRAVE $tg\,\alpha = \frac{\text{NASPRAMNA}}{\text{NALEGLA}}$, GDE JE α UGAO KOJI PRAVA ZAKLAPA SA HORIZONTALNOM OSOM

Zadatak za domaći:

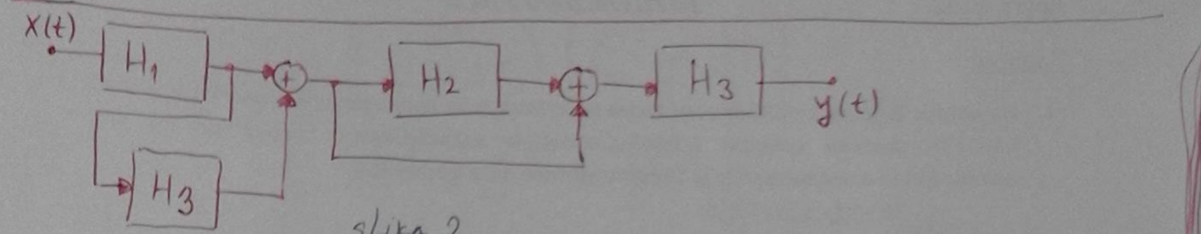
Na slici 2 je prikazana struktura nekog linearnog sistema. Prenosne funkcije pojedinih sklopova su: $H_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$, $H_2(j\omega)=e^{-j\omega}$ i $H_3(j\omega)=j\omega$.

a) Odrediti prenosnu funkciju ovog sistema.

b) Ako na ulazu sistema deluje impuls $x(t)=\begin{cases} t, & |t|\le 1 \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$

skicirati signal na izlazu sistema.

c) Odrediti vrednost izlaznog signala u trenutku $t=0.5$.



slika 2.

DOMAĆI